MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Concursul Doljean de Matematică

09.03.2013

Clasa a IX-a

1. Dacă A = $\left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbb{N}\right\}$ şi B = $\{x \in \mathbb{N} || x-2| \leq 3\}$, determinaţi numărul elementelor mulţimii A $\cup$ B.

R.M.C. Nr. 1/2012-2013

2. Să se determine suma numerelor naturale impare cuprinse între $n^2 - 3n + 2$ şi $n^2 + 5n + 6$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

Cristian Moanţă, Craiova

3. Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie cu proprietatea:

$$f\big(1 + f(n)\big) = n + 1, (\forall) n \in \mathbb{N}, (*).$$

a) Arătaţi că: $f(n+2) = f(n) + 2, (\forall) n \in \mathbb{N}$;

b) Ştiind că $f\big(f(1)\big) = 1$, determinaţi funcţiile f cu proprietatea $(*)$.

Dan Secleman, Craiova

4. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, respectiv ACE. Să se demonstreze că patrulaterul $H_1\ H_2 H_3 H_4$ este paralelogram.

C.d.p.

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii:

1. $x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ şi $\frac{4x-5}{x+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{4x-5}{x+1}$ pătrat perfect.

Avem:

$$\frac{4x-5}{x+1} = 4 - \frac{9}{x+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x+1 \in \{-9,-3,-1,1,3,9\} \Leftrightarrow$$
$$x \in \{-10,-4,-2,0,2,8\}.$$

Din condiţia $\frac{4x-5}{x+1}$ pătrat perfect, se obţine $x = 2$. Deci A = $\{2\}$.

Avem: $x \in B \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3,\ x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5,\ x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$x \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Deci card(A ∪ B) = 6.

2. Cum produsul a două numere naturale consecutive este par, rezultă că:

$n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$ şi $n^2 + 5n + 6 = (n+2)(n+3)$, sunt numere naturale pare pentru $n \geq 3$.

Notăm cu S suma celor $(4n+2)$ termeni impari ai unei progresi aritmetice cu raţia 2, în care primul termen este $(n-1)(n-2)+1$, iar ultimul termen este $(n+2)(n+3)-1$.

În concluzie $S = \frac{(4n+2)(2n^2+2n+8)}{2}$ sau $S = 4n^3 + 6n^2 + 18n + 8$.

3. a) Cu substituţia $n \to 1 + f(n)$ se obţine

$$f\left(1 + f\left(1 + f(n)\right)\right) = f(n) + 2, (\forall) n \in \mathbb{N},$$

Ţinând cont de ipoteză rezultă: $f(n+2) = f(n) + 2,\ (\forall) n \in \mathbb{N}$.

b) Cu substituţia $n \to f(n)$ în relaţia din enunţ avem:

$f\left(1 + f\left(f(n)\right)\right) = f(n) + 1, (\forall) n \in \mathbb{N}$, care pentru $n = 1$ devine:

$f\left(1 + f\left(f(1)\right)\right) = f(1) + 1$, adică $f(2) = f(1) + 1$ $(**)$.

Pentru $n = 0$ relaţia de la punctul a) devine $f(2) = f(0) + 2$ şi atunci din $(**)$, avem $f(1) = f(0) + 1$.

Pentru $n = 1$ relaţia de la punctul a) devine $f(3) = f(1) + 2 = f(0) + 3$.

Aşadar $f(1) = a + 1, f(2) = a + 2, f(3) = a + 3$, unde $f(0) = a$.

Prin inducţie matematică se obţine $f(n) = n + a,\ (\forall)n \in \mathbb{N}$. Înlocuind $f(n) = n + a$ în relaţia din enunţul problemei se obţine $a = 0$ şi atunci:

$$f(n) = n, (\forall)n \in \mathbb{N}.$$

4. Folosind relaţia lui Sylvester pentru O centrul cercului circumscris şi H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentre, găsim:

$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, (1); $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, (2);

$\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$, (3); $\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$, (4).

$H_1\ H_2H_3H_4$ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_4H_3}$. Folosind (1), (2), (3), (4), găsim

$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$, (5);

$\overrightarrow{H_4H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$, (6). Din $(5), (6)$ obţinem relaţia de condiţie ca $H_1\ H_2H_3H_4$ să fie paralelogram.

Barem de corectare

Clasa a IX-a

Problema 1	Oficiu	1 p
Determinarea mulţimii A		4 p
Determinarea mulţimii B		3 p
Finalizare		2 p
TOTAL		10p

Problema 2	Oficiu	1 p
n^2-3n+2 şi n^2+5n+6 sunt numere pare		2 p
Determinarea numărului de termeni impari ai progresiei aritmetice cu raţia 2 şi $(4n+2)$ termeni		3 p
Determinarea primului şi ultimului termen al progresiei aritmetice		2 p
Finalizare		2 p
TOTAL		10p

Problema 3	Oficiu	1 p
$a)$ Substituţia $n \to 1+f(n)$		1 p
$f(n+2)=f(n)+2,\ (\forall)n \in \mathbb{N}$.		2 p
$b)$ Substituţia $n \to f(n)$		1 p
Inlocuirea x=1 in relația obținută		1 p
$n=0$ relaţia de la punctul $a)$		1 p
$n=1$ relaţia de la punctul $a)$		1 p
Determinarea relației: $f(n)=n+a,\ (\forall)n \in \mathbb{N}$		1 p
Finalizare		1 p
TOTAL		10p

Problema 4	Oficiu	1 p
Relaţia lui *Sylvester* şi folosirea ei: $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}$, $\overrightarrow{H_3H_4}=\overrightarrow{OH_3}-\overrightarrow{OH_4}$		6 p
$H_1H_2H_3H_4$ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{H_4H_3}$		1 p
Finalizare		2 p
TOTAL		10p

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Concursul Doljean de Matematică

09.03.2013

Clasa a X-a

1. Se consideră funcţia $f:[0,3]\to[0,2]$, unde:

$$f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x}\ , & x\in[0,1]\\ \frac{x+1}{2}, & x\in(1,3]\end{cases}.$$

Arătaţi că:

a) f este strict crescătoare;

b) f este inversabilă şi determinaţi f^{-1}.

C.d.p.

2. Fie $(z_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere complexe definit prin $z_1=1$ şi $z_{n+1}=z_n+1+i$, $(\forall)n\geq 1$.

a) Determinaţi $p\in\mathbb{N}$ ştiind că: $z_1+z_2+...+z_{2013}=p\cdot z_{1007}$.

b) Arătaţi că nu există $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$ astfel încât: $z_k^2=z_{k-1}\cdot z_{k+1}$.

Ion Pătraşcu

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale:

$a)$ $\log_{[x]}x+\log_{[x^2]}x+\log_{[x^3]}x+\log_{[x^4]}x-2=\frac{1}{12}$;

$b)$ $2^{-3x^3+5x^2-x}=\frac{x^2+1}{x}$;

Cristian Moanţă, Craiova
Prejbeanu Ionel, Craiova

4. Determinaţi numerele $x,y,z\in(1,\infty)$, ştiind că:

$$\log_{yz}\frac{x^2+4}{4\sqrt{yz}}+\log_{zx}\frac{y^2+4}{4\sqrt{zx}}+\log_{xy}\frac{z^2+4}{4\sqrt{xy}}=0$$

Dan Seclăman

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte
între 1 şi 10.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii:

1. $a)$ $x \to 1-x$ este descrescătoare pe $[0,1]$ $\Rightarrow$ $x \to \sqrt{1-x}$ este descrescătoare pe $[0,1]$ $\Rightarrow$ $x \to 1-\sqrt{1-x}$ este strict crescătoare pe $[0,1]$.

Deci f este strict crescătoare pe $[0,1]$ şi evident f este strict crescătoare pe

$(1, 3]$. Deoarece $f(1)=1$ şi $\frac{x+1}{2} > 1$, $(\forall)\, x \in (1,3]$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[0, 3]$.

$b)$ Conform cu $a)$, f este injectivă. Ecuaţia $f(x)=y$, $x \in [0,1]$ are soluţia unică $x=-y^2+2y$ pentru $y \in [0,1]$, iar ecuaţia $f(x)=y$, $(\forall)\, x \in (1,3]$, are soluţia unică $x = 2y-1$ pentru $y \in (1,2]$. Cum $[0,1] \cup (1,2]=[0, 2]$, rezultă că f este bijectivă şi deci inversabilă. În plus $f^{-1}: [0,2] \to [0,3]$,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x^2+2x, & x \in [0,1] \\ 2x-1, & x \in (1,2] \end{cases}.$$

2.$a)$ $z_2 = z_1+1+i = 2+i$; $z_3 = z_2+1+i = 3+2i$

Prin inducţie găsim că $z_k = k+(k-1)i$, $(\forall)\ k \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{2013} z_k = \sum_{k=1}^{2013}(k+(k-1)i) = \sum_{k=1}^{2013} k + i\sum_{k=1}^{2013}(k-1) = \frac{2013\cdot 2014}{2} + i\cdot\frac{2012\cdot 2013}{2} =$$

$2013\cdot(1007+1006\cdot i) = 2013\cdot z_{1007}$.

În consecinţă $p = 2013$

$b)$ Presupunem că există z_{k-1}, z_k, z_{k+1}; $k \geq 2$ cu proprietatea $z_k^2 = z_{k-1}\cdot z_{k+1}$.

Avem: $(k+(k-1)i)^2 = (k-1+(k-2)i)\cdot(k+1+ki)$

$k^2-(k-1)^2+2k(k-1)i = k^2-1+i[k(k-1)+(k+1)(k-2)]-k(k-2)$

$k^2-k^2+2k-1+(2k^2-2k)i = k^2-1-k^2+2k+i(2k^2-2k-2)$

Din $2k^2-2k = 2k^2-2k-2 \Rightarrow 0=-2$ (fals).

3. $a)$ Se impune condiţia: $x \in [2,\infty)$. Pentru $k = \overline{1,4}$ avem $[x^k] \leq x^k \Longrightarrow 1 \leq \log_{[x^k]} x^k \Longrightarrow \log_{[x^k]} x \geq \frac{1}{k}$ $(*)$. Deci $\log_{[x]} x + \log_{[x^2]} x + \log_{[x^3]} x + \log_{[x^4]} x - 2 \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-2 = \frac{1}{12}$.

Egalitate are loc în cazul: $\log_{[x^k]} x = \frac{1}{k}$, $(\forall) k = \overline{1,4}$, care au loc simultan $\Leftrightarrow x \in \mathbb{N}, x \geq 2$. Deci ecuaţia admite soluţii de forma: $x = n$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$.

$b)$ Egalitatea are sens numai dacă $x > 0$. Logaritmând ecuaţia în baza 2, ecuaţia devine: $-3x^3+5x^2-x = \log_2 \frac{x^2+1}{x}$. Cum

$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} > 2 \Longrightarrow \log_2(x + \frac{1}{x}) > 1, -3x^3 + 5x^2 - x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3x^3 + 5x^2 - x - 1 = -(3x+1)(x-1)^2 < 0, \ (\forall)x > 0 \Rightarrow x_0 = 1$ este singura soluţie.

4.Avem $\log_{yz} \frac{x^2+4}{4\sqrt{yz}} = \log_{yz} \frac{x^2+4}{4} - \frac{1}{2}$ şi analoagele. Relaţia din enunţ devine:

$\log_{yz} \frac{x^2+4}{4} + \log_{zx} \frac{y^2+4}{4} + \log_{xy} \frac{z^2+4}{4} = \frac{3}{2}$, (1).

Dar $\frac{x^2+4}{4} \geq x$, $(\forall)\ x \in (1,\infty)$ cu egalitate $\Leftrightarrow\ x = 2$.

Atunci $\log_{yz} \frac{x^2+4}{4} \geq \log_{yz} x = \frac{\lg x}{\lg y + \lg z}$ şi analoagele;

Însumăm cele 3 inegalităţi şi obţinem:

$\sum \log_{yz} \frac{x^2+4}{4} \geq \frac{\lg x}{\lg y + \lg z} + \frac{\lg y}{\lg z + \lg x} + \frac{\lg z}{\lg x + \lg y}$, (2)

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z = 2$. Evident că $\lg x > 0$, $\lg y > 0$, $\lg z > 0$ şi atunci notând cu S membrul drept al inegalităţii (2) avem:

$S + 3 = (\lg x + \lg y + \lg z)\left(\frac{1}{\lg x + \lg y} + \frac{1}{\lg y + \lg z} + \frac{1}{\lg z + \lg x}\right) \geq \frac{9}{2}$ cu egalitate $\Leftrightarrow\ x = y = z$. Deci $S \geq \frac{3}{2}$ şi ţinând cont de (1) rezultă că $S = \frac{3}{2}$. Aşadar $x = y = z = 2$.

Barem de corectare
Clasa a X-a

Problema 1	Oficiu	1 p
f este strict crescătoare pe $[0,1]$		2 p
f este strict crescătoare pe $(1,3]$		1 p
f este strict crescătoare pe $[0,3]$		1 p
f este injectivă		1 p
f este surjectivă		1 p
f este inversabilă		1 p
Determinare f^{-1}		2 p
TOTAL		10p

Problema 2	Oficiu	1 p
a) Găsirea relaţiei $z_k = k+(k-1)i$, $(\forall)\ k \geq 1$		2 p
Calculul sumei		2 p
Determinarea lui p		1 p
b) Presupunem că există z_{k-1}, z_k, z_{k+1}; $k \geq 2$ cu proprietatea $z_k^2 = z_{k-1} \cdot z_{k+1}$		2 p
Finalizare		2 p
TOTAL		10p

Problema 3	Oficiu	1 p
a) Condiţii de existenţă		1p
Determinarea $\log_{[x^k]} x \geq \frac{1}{k}$		1 p
Folosirea inegalităţii		1 p
		1 p
Finalizare		1 p
b) Condiţii de existenţă		1 p
Logaritmarea ecuaţiei		2 p
Rezolvarea ecuaţiei		1 p
Finalizare		
TOTAL		10p

Problema 4	Oficiu	1 p
Deducerea relaţiei (1) 3 p		
Relaţia (2)		3 p
Finalizare		3 p
TOTAL		10p

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN DOLJ

Concursul Doljean de Matematică
09.03.2013
Clasa a XI-a

1. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$, ştiind că funcţia $f:(-\infty,3]-\{2\}\to\mathbb{R}$,

$$f=\begin{cases}\frac{tg(a(x-2))}{(2x+1)\sin(x-2)}, & x\in(2,3]\\ \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}, & x\in(-\infty,2)\end{cases},$$

are limită în punctul $x_0=2$.

C.d.p.

2. Dacă $A,B\in M_3(\mathbb{C})$ şi $A+B=AB$, arătaţi că A este inversabilă dacă şi numai dacă B este inversabilă.

C.d.p.

3. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $A\in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea: $A^3=A+I_n$, (1)

$a)$ Arătaţi că există $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, astfel încât $A=x\cdot I_n$ să verifice proprietatea (1).

$b)$ Demonstraţi că $\det A>0$.

$c)$ Pentru $n=2$ arătaţi că $|TrA|<1+detA$ şi că nu există matrice $A\in M_2(\mathbb{Z})$ care verifică (1). ($Tr(A)$ reprezintă urma lui A).

Dan Seclăman

4. Fie șirul $(x_n)_{n\geq k}$, unde $n^{x_n}=n+1$.

$a)$ Să se determine valoarea minimă $k\in\mathbb{N}^*$, pentru care șirul este bine definit.

$b)$ Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit.

$c)$ Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Luminița Popescu, Craiova
Cristian Moanţă, Craiova

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii:

1. Funcția f are limită în punctul $\boldsymbol{x_0 = 2} \Leftrightarrow l_s(2) = l_d(2)$.

$\Leftrightarrow\Leftrightarrow$

$l_s(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}} = 1$; (1)

$l_d(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{tg(a(x-2))}{(2x+1)\sin(x-2)} =$

$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{tg(a(x-2))}{(2x+1)\sin(x-2)} = \frac{a}{5} \cdot$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă: $a = 5$.

2. $A + B = AB \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n \Rightarrow \det(A - I_n) \neq 0$, $\det(B - I_n) \neq 0$. (*)

Dar: $A + B = AB \Leftrightarrow A = (A - I_n)B$. Ţinând cont de (*) rezultă: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$.

3. a) Pentru $A = x \cdot I_n$ relaţia din enunţ devine $x^3 \cdot I_n = (x + 1) \cdot I_n$ şi atunci: $x^3 = x + 1$. Graficele funcţiilor $f(x) = x^3$ şi $g(x) = x + 1$ se intersectează într-un singur punct şi deci există $x \in \mathbb{R}$ cu $A = x \cdot I_n$. Evident $x \notin \mathbb{Q}$.

b) $A^3 = A + I_n \Rightarrow \det A \cdot (\det A)^2 = \det(A + I_n) \Rightarrow$ $\det A \cdot \det(A + I_n) \geq 0$. (1)

De asemenea $A^3 + A^2 = A^2 + A + I_n \Rightarrow (\det A)^2 \cdot \det(A + I_n) = \det(A^2 + A + I_n) \geq 0 \Rightarrow \det(A + I_n) \geq 0$. (2)

Din (1) şi (2) obţinem: $\det A \geq 0$. (3)

Dar: $A(A^2 - I_n) = I_n \Rightarrow \det A \neq 0$. (4)

Din (3) şi (4) $\Rightarrow \det A > 0$.

c) Conform cu b) avem: $\det A > 0$, $\det(A + I_2) > 0$ şi $\det(A - I_2) > 0$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci:

$$\begin{cases} ad - bc > 0 \\ ad - bc + a + d + 1 > 0 \\ ad - bc - a - d + 1 > 0 \end{cases}$$

Deci: $(Tr\, A + \det A + 1 > 0, -Tr\, A + \det A + 1 > 0) \Rightarrow$ $(Tr\, A > -(1 + \det A), Tr\, A < 1 + \det A) \Rightarrow |Tr\, A| < 1 + \det A$.

Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci: $\det A \cdot \det(A - I_n) \cdot \det(A + I_n) = 1 \Rightarrow \det A = \det(A - I_n) = \det(A + I_n) =$

1. Atunci:

$ad - bc = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + d = 2 \\ a + d = -2 \end{cases}$ fals!

4. $a)$ Pentru $n = 1$ egalitatea dată este imposibilă.

Pentru $n \geq 2$, avem $x_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$, care are sens, deci $k_{min} = 2$.

$b)$ Demonstrăm că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

$x_n > x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln n} > \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \Leftrightarrow (\ln(n+1))^2 > \ln n \cdot \ln(n+2)$. $(*)$

Cu inegalitatea mediilor avem:

$\ln n \cdot \ln(n+2) < (\frac{\ln n + \ln(n+2)}{2})^2 = (\frac{\ln(n^2+2n)}{2})^2 < (\frac{\ln(n^2+2n+1)}{2})^2 = (\frac{\ln(n+1)^2}{2})^2 = (\ln(n+1))^2$, adică inegalitatea $(*)$.

Deoarece $x_n > 0, (\forall)\ n \geq 2$ și $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător deducem că (x_n) este mărginit.

$c)$ Avem

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1.$

Barem de corectare
Clasa a XI-a

Problema 1	Oficiu	1 p
Funcția f are limită în punctul $x_0 = 2 \Leftrightarrow l_s(2) = l_d(2)$		1 p
Determinarea $l_s(2)$		3 p
Determinarea $l_d(2)$		3 P
Finalizare		2 p
TOTAL		10p

Problema 2	Oficiu	1 p
Determinarea relației $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$		2 p
Determinarea $\det(A - I_n) \neq 0$, $\det(B - I_n) \neq 0$		4 p
Determinarea relației $A = (A - I_n)B$		1 p
Finalizare		2 p
TOTAL		10p

Problema 3	Oficiu	1 p
a) Scrierea $x^3 \cdot I_n = (x + 1) \cdot I_n$		1 p
Concluzie $x \notin \mathbb{Q}$		2 p
b) Determinarea relației (1), (2)		1 p
Determinarea relației (3), (4)		1 p
Finalizare *b)*		1 p
c) Prelucrare *b)*		1 p
Demonstrare $\lvert Tr\ A\rvert < 1 + \det A$		1 p
Finalizare		1 p
TOTAL		10p

Problema 4	Oficiu	1 p
a) Pentru $n = 1$ egalitatea dată este imposibilă		1 p
Determinare $k_{min} = 2$		1 p
b) Determinare $(\ln(n + 1))^2 > \ln n \cdot \ln(n + 2)$.		2 p
Finalizare monotonie		2 p
(x_n) este mărginit		1 p
c) $\lim_{n\to\infty} x_n$		2 p
TOTAL		10p

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN DOLJ

Concursul Doljean de Matematică
09.03.2013
Clasa a XII-a

1. Arătaţi că mulţimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a+6b & -9b \\ 4b & a-6b \end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor pătrate, formează un monoid comutativ şi apoi aflaţi elementele inversabile ale monoidului.

R.M.C. Nr. 1/2012-2013

2. Fie G un grup multiplicativ cu 4 elemente, astfel încât $x^2=e$, $(\forall)x\in G$, unde e este elementul neutru al grupului.
a) Alcătuiţi tabela lui G şi arătaţi că G este abelian.
b) Demonstraţi că: $(G,\ \cdot)\not\simeq(\mathbb{Z}_4,+)$.

C.d.p.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive, cu proprietatea că dacă F este o primitivă a sa, există $a>0$ astfel încât $F(-a)=F(a)$. Arătaţi că există $c\in\mathbb{R}$ astfel ca $f(c)=c^{2013}+c^{2011}$.

Dan Seclăman

4. a) Fie $f:I\to(0,\infty)$ o funcție de două ori derivabilă. Știind că:

$$\int\left(\frac{f''(x)}{f(x)}-\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2\right)dx=\frac{f'(x)}{f(x)}+\mathcal{C}$$

să se calculeze integrala:

$$\int\frac{e^x-\sin x-\cos x}{e^x(e^{-x}+\sin x-\cos x)^2}dx,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right);$$

b) Să se calculeze:

$$\int_0^3\frac{(3-x)^{2011}}{(3+x)^{2013}}dx.$$

Ani Drăghici, Craiova
Cristian Moanţă, Craiova

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii:

1. Se arată uşor că: $A \cdot B \in \mathcal{M}$, $(\forall)A, B \in \mathcal{M}$ (1)
Se ştie că înmulţirea matricelor este asociativă, (2).
Cum $I_2 \in \mathcal{M}$ $(a = 1, b = 0)$, folosind (1) şi (2) deducem că $(\mathcal{M},\cdot)$ este monoid. Comutativitatea este imediată.
Pentru $A = \begin{pmatrix} a+6b & -9b \\ 4b & a-6b \end{pmatrix}$, avem $\det A = a^2$.
Atunci: A inversabilă $\Leftrightarrow a \neq 0$ şi
$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a-6b & 9b \\ -4b & a+6b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$.

2. $a)$ Fie $G = \{e, a, b, c\}$. Atunci: $ab \neq a$, $ab \neq b \Rightarrow ab = c$.
Analog
$ba = c$, $ac = ca = b$, $bc = cb = a$, iar tabela lui G este:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Aşadar G este abelian.
$b)$ Folosind tabela lui $(\mathbb{Z}_4, +)$, obţinem uşor că $(G,\cdot) \not\simeq (\mathbb{Z}_4, +)$.

3. Avem $f(x) = F'(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ şi observăm că $x^{2013} = \left(\frac{x^{2014}}{2014}\right)'$, $x^{2011} = \left(\frac{x^{2012}}{2012}\right)'$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$..
Atunci considerăm funcţia $g\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) - \frac{x^{2014}}{2014} - \frac{x^{2012}}{2012}$, care este derivabilă şi în plus $g(-a) = g(a)$.
Conform teoremei lui Rolle, există $c \in (-a, a)$ astfel încât $g'(c) = 0$, de unde obţinem concluzia problemei.

4. $a)$ Funcţia este: $f\colon (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} + \sin x - \cos x$. Folosind relația din enunț se obține: $\mathrm{I} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} - \sin x - \cos x}{e^{-x} + \sin x - \cos x} + \mathcal{C}$.

$b)$ Folosind substituția $t = \frac{3-x}{3+x}$, obținem: $\int_0^3 \left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{2011} \cdot \left(\frac{1}{3+x}\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 t^{2011}\, dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2012}.$$

Barem de corectare
Clasa a XII-a

Problema 1	Oficiu 1 p
Demonstrarea $(\mathcal{M},\cdot)$ - monoid comutativ	4 p
Determinarea $\det A = a^2$	1 p
A inversabilă $\Leftrightarrow a \neq 0$	2 p
Finalizare	2 p
TOTAL	10p

Problema 2	Oficiu 1 p
Alcătuire tabela lui G	4 p
$(G,\cdot)$ este abelian	1 p
Tabela lui $(\mathbb{Z}_4,+)$	2 p
Demonstrarea $(G,\cdot) \ncong (\mathbb{Z}_4,+)$	2 p
TOTAL	10p

Problema 3	Oficiu 1 p
Determinarea funcției $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $g(x) = F(x) - \frac{x^{2014}}{2014} - \frac{x^{2012}}{2012}$	4 p
Aplicarea teoremei lui Rolle	3 p
Finalizare	2 p
TOTAL	10p

Problema 4	Oficiu 1 p
$a)$ Precizarea funcției $f(x) = e^{-x} + \sin x - \cos x$	2 p
Finalizare	2 p
$b)$ Determinarea substituției $t = \frac{3-x}{3+x}$	2 p
Finalizare	3 p
TOTAL	10p